3.2.5 Kalorimetrická rovnice I

Předpoklady: 030204

Pomůcky:

Př. 1: Z pohledu čajových puristů je to zvěrstvo, ale Martin, když občas pospíchá, řeší problém s příliš horkým čajem tím, že vařící čaj smíchá se studeným. Kolik studeného čaje o teplotě místnosti $22°\mathrm{C}$ bude potřebovat, aby zchladil na přijatelnou teplotu $42°\mathrm{C}$ čtvrt litru horkého čaje o teplotě $70°\mathrm{C}$?

Horký čaj se ochladí, teplý se ohřeje. Pokud zanedbáme ztráty, teplo z horkého čaje přeje do čaje studeného.
Teplý čaj:
0,25 l $\Rightarrow$ $m = 0,25\ \mathrm{kg}$,
ochlazení z $70°\mathrm{C}$ na $42°\mathrm{C}$ $\Rightarrow$ $\Delta t = 70°\mathrm{C} - 42°\mathrm{C} = 28°\mathrm{C}$
čaj můžeme považovat prakticky za vodu: $c = 4200\ \mathrm{J/kg°C}$.
Odevzdané teplo: $Q = mc\Delta t = 0,25 \cdot 4200 \cdot 28\ \mathrm{J} = 29\,400\ \mathrm{J}$

Studený čaj:
Přijaté teplo: $29\,400\ \mathrm{J}$ (teplo odevzdané horkým čaje)
ohřátí z $22°\mathrm{C}$ na $42°\mathrm{C}$ $\Rightarrow$ $\Delta t = 20°\mathrm{C}$
$Q = mc\Delta t \qquad / : c\Delta t$
$$m = \frac{Q}{c\Delta t} = \frac{29400}{4200 \cdot 20}\ \mathrm{kg} = 0,35\ \mathrm{kg}$$
K 0,25 l horkého čaje je třeba přilít 0,35 studeného čaje.

Základní předpoklad řešení předchozího příkladu je možné zapsat rovnicí:
$Q_s = Q_t \quad (\textit{teplo přijaté studeným čajem} = \textit{teplo odevzdané horkým čajem})$
Dosadíme vzoreček pro množství tepla: $m_s c_s \Delta t_s = m_t c_t \Delta t_t$
Získaný vzorec se označuje jako **kalorimetrická rovnice**.
Kalorimetrická rovnice bývá zapisována mnoha způsoby:

- $m_s c_s \Delta t_s = m_t c_t \Delta t_t$,
- $m_1 c_1 \Delta t_1 = m_2 c_2 \Delta t_2$,
- $m_s c_s (t - t_s) = m_t c_t (t_t - t)$,
- $m_1 c_1 (t_1 - t) = m_2 c_2 (t - t_2)$.

Všechny jsou v podstatě rovnocenné, záleží na tom, abychom se dobře orientovali ve významu indexů. Pokud teplo přechází mezi různými látkami

Předchozí příklad by bylo možné pomocí kalorimetrické rovnice řešit takto:
$Q_s = Q_t$
$m_s c_s \Delta t_s = m_t c_t \Delta t_t \qquad (c_s = c_t = c$ v obou případech jde o vodu)
$m_s c \Delta t_s = m_t c \Delta t_t \qquad / : c$
$m_s \Delta t_s = m_t \Delta t_t \qquad / : \Delta t_s$

$$m_s = \frac{m_t \Delta t_t}{\Delta t_s} = \frac{0,25 \cdot (70-42)}{42-22}\ \text{kg} = 0,35\ \text{kg}$$

Př. 2: Navrhni pokus, kterých bychom experimentálně ověřili výsledek předchozího příkladu. Proběhne pokus přesně tak, jak jsme spočítali? Bude se výsledek pokusu lišit od početní předpovědi? Jak? Proč?

Smícháme 0,25 litru vody o teplotě $70°C$ a 0,35 litru vody o teplotě $22°C$. Po smíchání by voda měla mít teplotu $42°C$, ve skutečnosti však naměříme o něco méně, protože část tepla z teplé vody uteče a část tepla musí zahřát i kádinku, ve které je studenější voda.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad mě trochu překvapil. Očekával jsem, že část žáků bude navrhovat něco otročtěji podobného zadání příkladu 1 (budeme přilévat studenou vodu, dokud se voda neochladí na $42°C$ ...), ale nic takového se neobjevilo.

Pedagogická poznámka: Další příklady řeším na tabuli pomocí kalorimetrické rovnice, ale nenutím žáky v lavicích, aby ji používali, pokud to není nutné.

Př. 3: Jindy Martin naopak zahřívá stydnoucí čaj vařící vodou. Kolik vařící vody o teplotě $98°C$ musí dolít do 0,35 litru stydnoucího čaje o teplotě $25°C$, aby získal čaj o teplotě $42°C$?

Využijeme kalorimetrickou rovnici:

$Q_s = Q_t$

$m_s c_s \Delta t_s = m_t c_t \Delta t_t$ ($c_s = c_t = c$ v obou případech jde o vodu)

$m_s c \Delta t_s = m_t c \Delta t_t$ $/ : c$

$m_s \Delta t_s = m_t \Delta t_t$ $/ : \Delta t_t$ potřebujeme vyjádřit m_t

$$m_t = \frac{m_s \Delta t_s}{\Delta t_t} = \frac{0,35 \cdot (42-25)}{(98-42)}\ \text{kg} = 0,106\ \text{kg}$$

Do chladnoucího čaje musíme dolít 0,106 litru vařící vody.

Př. 4: Olověné závaží o hmotnosti 100 g jsme vhodili do 0,5 litru vody o teplotě $22°C$. Po vyrovnání teplot měla voda (i závaží) teplotu $31°C$. Jakou teplotu mělo závaží v okamžiku, kdy jsme ho vhazovali do vody?

Využijeme kalorimetrickou rovnici: olovo bylo teplé, voda studená. Hledáme, jak se změnila teplota olova (Δt_o).

$Q_o = Q_v$

$m_o c_o \Delta t_o = m_v c_v \Delta t_v$ $/ : m_o c_o$

$$\Delta t_o = \frac{m_v c_v \Delta t_v}{m_o c_o} = \frac{0,5 \cdot 4200 \cdot (31-22)}{0,1 \cdot 129}\ °C \doteq 1465\ °C$$

Výsledek je zřejmý nesmysl, olovo taje při poměrně nízké teplotě ($327,5°C$) $\Rightarrow$ z výsledku vyplývá, že bychom ho do vody museli nalévat roztavené, ale tekuté olovo má zřejmě jinou měrnou tepelnou kapacitu (měrná tepelná kapacita vody a ledu se také liší).

Př. 5: Během ředění vlil Petr do skleněné kádinky o hmotnosti 85 g 100 ml vody teplé $25°C$. Po přeměření teploty v kádince naměřil pouze $23,5°C$. Jaká byla původní teplota kádinky, jestliže měrná tepelná kapacita skla je $800\ J/kg°C$?

Opět kalorimetrická rovnice, neznáme původní teplotu studenějšího předmětu (kádinky).

$Q_k = Q_v$

$m_k c_k \Delta t_k = m_v c_v \Delta t_v \qquad / : m_k c_k$

$$\Delta t_k = \frac{m_v c_v \Delta t_v}{m_k c_k} = \frac{0,1 \cdot 4200 \cdot (25 - 23,5)}{0,085 \cdot 800}\ °C \doteq 9,3\ °C$$

Kádinka se ohřála o $9,3°C$ na teplotu $23,5°C$ $\Rightarrow$ původní teplota kádinky byla $23,5 - 9,3\ °C = 14,2°C$.

Kádinka měla před nalitím vody teplotu $14,2°C$.

Př. 6: Během popouštění byla ocelová sekyra o hmotnosti 1,8 kg a teplotě $290°C$ ponořena do vodní lázně o objemu 30 litrů a teplotě $35°C$. Po vyrovnání teplot měla sekyra i voda teplotu $36,7°C$. Urči měrnou tepelnou kapacitu železa.

Opět kalorimetrická rovnice, hledáme měrnou tepelnou kapacitu jedné látky.

$Q_o = Q_v$

$m_o c_o \Delta t_o = m_v c_v \Delta t_v \qquad / : m_o \Delta t_o$

$$\Delta t_o = \frac{m_v c_v \Delta t_v}{m_o \Delta t_o} = \frac{30 \cdot 4200 \cdot (36,7 - 35)}{1,8 \cdot (290 - 36,7)}\ J/kg°C \doteq 470\ J/kg°C$$

Měrná tepelná kapacita oceli je $470\ J/kg°C$.

Př. 7: Podívej se do tabulky měrných tepelných kapacit. Jakou hodnotu bys při provedení pokusu z předchozího příkladu očekával? Je možné najít rozumný důvod, který by vysvětlil výsledek předchozího příkladu z kovárny?

Při provedení pokusu s horkými předměty vždy část uteče do okolí $\Rightarrow$ výsledná teplota se tak sníží.

Ve vzorci pro měrnou tepelnou kapacitu se:

- číslo v čitateli zlomku zmenší (menší číslo v rozdílu teplot),
- číslo ve jmenovateli se naopak zvětší (větší číslo v rozdílu teplot),

$\Rightarrow$ výsledek by měl být menší $\Rightarrow$ získaná hodnota měrné tepelné kapacity by měla být menší než hodnota v tabulkách (rozpor s výsledkem).

V kovárně je velmi teplý vzduch $\Rightarrow$ i během vyrovnávání teplot bude přijímat teplo z okolí a konečná teplota tak bude vyšší $\Rightarrow$ změny ve zlomku proběhnou opačným způsobem a hodnota měrné tepelné kapacity bude větší než tabulková.

Pedagogická poznámka: Dva zbývající příklady jsou určeny rychlejším žákům. Problematika, kterou obsahují se probírá v následující hodině, proto je možné je přeskočit.

Př. 8: Do 0,5 litru vody o teplotě $22°C$ a přilijeme $0,25$ litru vody o teplotě $96°C$. Jaká bude výsledná teplota smíchané vody?

Využijeme kalorimetrickou rovnici:

$Q_s = Q_t$

$m_s c_s \Delta t_s = m_t c_t \Delta t_t$ $\quad$ ($c_s = c_t = c$ v obou případech jde o vodu)

$m_s c \Delta t_s = m_t c \Delta t_t$ $\quad$ $/ : c$

$m_s \Delta t_s = m_t \Delta t_t$ $\quad$ Neznáme konečnou teplotu $\Rightarrow$ nemůžeme určit ani jednu změnu teploty $\Rightarrow$ zůstávají nám v rovnici dvě neznámé $\Rightarrow$ rozepíšeme si změny teploty:

- $\Delta t_s = t_k - t_s$,
- $\Delta t_t = t_t - t_k$.

$m_s(t_k - t_s) = m_t(t_t - t_k)$

Dosadíme: $0,5(t_k - 22) = 0,25(98 - t_k)$

$0,5t_k - 11 = 24 - 0,25t_k$ $\quad$ $/ + 11 + 0,25t_k$

$0,75t_k = 35$ $\quad$ $/ : 0,75$

$t_k \doteq 46,7\ °C$

Výsledná voda bude mít teplotu $46,7\ °C$.

Dodatek: Samozřejmě předchozí příklad by bylo možné vypočítat obecně:

$m_s(t_k - t_s) = m_t(t_t - t_k)$

$m_s t_k - m_s t_s = m_t t_t - m_t t_k$ $\quad$ $/ + m_s t_s + m_t t_k$

$m_s t_k + m_t t_k = m_t t_t + m_s t_s$

$(m_s + m_t)t_k = m_t t_t + m_s t_s$ $\quad$ $/ : (m_s + m_t)$

$$t_k = \frac{m_t t_t + m_s t_s}{m_s + m_t} = \frac{0,25 \cdot 96 + 0,5 \cdot 22}{0,25 + 0,5}\ °C \doteq 46,7\ °C$$

Tímto způsobem se postupuje v příští hodině.

Př. 9: Do 0,5 litru vody o teplotě $22°C$ vhodíme 200 g železa o teplotě $-22°C$. Jaká bude výsledná teplota?

Podobný příklad jako předchozí. Využijeme kalorimetrickou rovnici:

$Q_s = Q_t$

$m_s c_s \Delta t_s = m_t c_t \Delta t_t$ $\quad$ Neznáme konečnou teplotu $\Rightarrow$ nemůžeme určit ani jednu změnu teploty $\Rightarrow$ zůstávají nám v rovnici dvě neznámé $\Rightarrow$ rozepíšeme si změny teploty:

- $\Delta t_s = t_k - t_s$,
- $\Delta t_t = t_t - t_k$.

$m_s c_s(t_k - t_s) = m_t c_t(t_t - t_k)$

Dosadíme: $0,2 \cdot 450(t_k - [-22]) = 0,5 \cdot 4200(22 - t_k)$

$90t_k + 1980 = 46200 - 2100t_k$ $\quad$ $/ 2100t_k - 1980$

$2190t_k = 44\,220$ $\quad$ $/ : 2190$

$t_k = 20,2°C$

Výsledná teplota vody a železa bude $20,2°C$.

Shrnutí: Pokud zanedbáme vliv okolí, rovná se teplo přijaté teplu odevzdanému.